

ARITMÉTICA ENTERA

Inducción

- 1) Demuestra por inducción, que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
- 2) Demuestra que $2^n > n+1$ para todo $n \geq 2$.
- 3) Se define la aplicación $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Calcula $f^n(x) = (f \dots^n) \cdot f(x)$.
- 4) Demuestra que $2n+1 < n^2$ para todo $n \geq 3$.
- 5) Se define la sucesión de números t_1, t_2, t_3, \dots mediante: $t_1=1, t_2=2, t_3=3, t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3} \quad \forall n \geq 4$.
Demuestra que $t_n < 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- 6) Prueba que si $n \geq 14$, entonces n se puede expresar como suma de treses y ochos.
- 7) Sea a un número entero positivo. Vamos a demostrar, usando el principio fuerte de inducción, que $a^{n-1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$:
Si $n=1, a^{1-1} = 1$.
Supongamos que el resultado es cierto para todo k con $1 \leq k < n$.
Entonces, $a^{n-1} = \frac{a^{n-2} a^{n-2}}{a^{n-3}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$. Así, por el principio fuerte de inducción, $a^{n-1} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
¿Dónde falla este argumento?
- 8) Demostremos, por inducción, que $n = n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$:
Sea $M = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} / n = n+1\}$, entonces $0 \in M$.
Si $k \in M$ entonces $k = k+1$, luego $k+1 = k+2$, es decir, también $k+1 \in M$.
Por tanto, por inducción, $M = \mathbb{N}_0$ y el resultado es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$.
¿Dónde falla este argumento?

Sistemas de numeración

- 1) Halla la representación en las bases 2, 7 y 11 de los siguientes números expresados en base decimal:
137, 6243, 762, 1995.
- 2) Sabiendo que x_m significa que el número natural x está escrito en base m
 - a) Demuestra que $121_m = (m+1)_{10}^2$ para $m \geq 3$.
 - b) Expresa 169_m en base 10 para $m \geq 10$.
- 3) Halla la representación usual (en base 10) de $11011101_2, 4165_7, 1995_{11}, 1213_7, 1213_5$.
- 4) Halla x en las expresiones $331_x = 106_{11}$ y $274_8 = x_2$.

Aritmética entera

- 1) Usa el Algoritmo de Euclides para calcular $d = \text{mcd}(a, b)$, y encuentra x e y tales que $d = ax + by$.
 - a) $a = 1312, b = 800$
 - b) $a = 322, b = 406$.

2) Se dispone de un suministro ilimitado de agua, un gran cubo con un desagüe y dos garrafas que contienen 7 y 9 litros respectivamente, ¿cómo podría ponerse un litro de agua en el cubo?

3) Calcula las soluciones enteras de las siguientes ecuaciones diofánticas:

a) $28x + 36y = 44$.

b) $66x + 550y = 88$

c) $966x + 686y = 70$.

4) Determina los valores de $c \in \mathbb{Z}^+$, $10 < c < 20$, para los que la ecuación diofántica $84x + 990y = c$ tiene solución y determínala, en su caso.

5) Un turista tiene 1000 coronas checas y quiere cambiar ese dinero en una cantidad exacta de libras chipriotas y zlotys polacos. El cambio que le ofrece una cierta Oficina de Cambio es el siguiente: un zloty polaco = 13 coronas checas y una libra chipriota = 18 coronas checas. La oficina no proporciona fracciones de ninguna moneda, ¿de cuántas formas diferentes puede hacerlo? Describe una de dichas formas.

6) Un agente de Cambio y Bolsa tiene invertido dinero en acciones de Azucarera y Repsol. Las acciones de Azucarera se cotizan a 89 euros y las de Repsol a 614 euros cada una. Necesita hacer una transacción para disponer exactamente de 1000 euros en efectivo. ¿Puede hacerlo comprando acciones de Repsol y vendiendo acciones de Azucarera, solamente? En caso afirmativo, ¿cuántas acciones de cada tipo, como mínimo, comprará y venderá?

7) Halla todos los múltiplos de 28 cuyas dos últimas cifras sean 16.

8) Demuestra que si p es primo distinto de 2 y de 5 entonces, o bien $p^2 - 1$, o bien $p^2 + 1$ es divisible por 10.

9) Halla el máximo común divisor de los siguientes pares de polinomios:

a)
$$\begin{cases} P(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 3 \\ Q(x) = x^5 + 2x^3 + 3x^2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x \\ Q(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 \end{cases}$$

10) Aplica el criterio de Eisenstein para probar que el polinomio $P(x) = x^3 - 4x + 2$ es irreducible.

11) ¿Son irreducibles los polinomios $P(x) = x^2 + x + 1$, $P(x) = x^2 + x - 1$? ¿Se puede aplicar el criterio de Eisenstein?

OTROS EJERCICIOS

1) Si a y b son enteros tales que $\text{mcd}(a, b) = 1$, demuestra que:

a) $\text{mcd}(a + b, a - b) = 1$ ó 2

b) $\text{mcd}(2a + b, a + 2b) = 1$ ó 3

2) Demuestra que el cuadrado de todo número entero es de la forma $4k$ ó $4k + 1$.

Demuestra que el cubo de todo número entero es de la forma $9k$ ó $9k + 1$ ó $9k + 8$.

3) Si $a \in \mathbb{Z}$ y no es múltiplo de 2 ni de 3 demuestra que $24 \mid a^2 - 1$.

4) Demuestra que si 5 no divide a n entonces 5 divide a $n^8 - 1$.

5) Si a y b son enteros tales que $\text{mcd}(a, b) = 1$, demuestra que $\text{mcd}(a + b, a^2 + b^2) = 1$ ó 2

6) Si $a, b \in \mathbb{N}$ se define el mínimo común múltiplo de a y b como $m = \text{mcm}(a, b) = \frac{ab}{\text{m.c.d.}(a, b)}$

Prueba que: 1) $a \mid m$, $b \mid m$.

2) Si q es tal que $a \mid q$ y $b \mid q$ entonces $m \mid q$.

7) Prueba que si $a \mid c$, $b \mid c$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$ entonces $ab \mid c$.

- 8) Estudia si son o no primos, los números 811, 493 y 911.
- 9) Halla todos los primos p entre 100 y 300.
- 10) Utiliza la identidad $2^{rs} - 1 = (2^r - 1)(2^{(s-1)r} + 2^{(s-2)r} + \dots + 2^r + 1)$ para demostrar que si $2^n - 1$ es primo, entonces n es primo.
- 11) Halla el valor de un entero positivo n con las siguientes propiedades:
- i) n no contiene cuadrados (es decir, no hay factores repetidos en la factorización de n en números primos)
 - ii) Para cada primo p se tiene que $p|n \Leftrightarrow p-1 | n$.
- 12) Estudia si son ciertas las siguientes afirmaciones:
- a) $\forall m \in \mathbb{Z}, 2m$ y $4m+3$ son primos entre si.
 - b) $\forall m \in \mathbb{Z}, 2m+1$ y $3m+2$ son primos entre si.
- 13) Demuestra que todo número primo $p > 3$ se puede escribir de la forma
- a) $4n + 1$ ó $4n + 3$ para algún $n \in \mathbb{N}$
 - b) $6n + 1$ ó $6n + 5$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
- 14) Demuestra que si n es un entero positivo, ninguno de los n enteros consecutivos empezando por $(n+1)! + 2$ es primo.